Leçon 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Développements :

Théorème d'Ascoli, Densité des fonctions continues nulle part dérivables.

Bibliographie :

Rombaldi, Gourdon, Bernis, ZQ.

Rapport du jury 2017 :

Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend évidemment à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. De façon plus fine, on peut s'intéresser aux fonctions continues nulle part dérivables. Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes ou des fonctions monotones relève de cette leçon. L'étude de la dérivée au sens des distributions de pour une fonction intégrable est un résultat intéressant qui peut trouver sa place dans cette leçon.

Rapport du jury 2016 :

Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. De façon plus fine, on peut s'intéresser aux fonctions continues nulle part dérivables. Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes ou des fonctions monotones relève de cette leçon. Les applications du théorème d'Ascoli (avec, par exemple, des exemples d'opérateurs à noyaux compacts), sont les bienvenues. L'étude de la dérivée au sens des distributions de pour une fonction intégrable est un résultat intéressant.

1 Intro

A partir du XVII^e siècle, le développement du calcul infinitésimal, motivé par de nombreux problèmes de cinématique, de mécanique, ou de calcul de variations, fait de la «fonction» l'objet central des mathématiques modernes, alors que jusque là, le «nombre» était à la base de l'édifice mathématique.

La notion de continuité a été évoquée dès le XVII^e siècle. Mais il faut attendre le début du XIX^e siècle, pour en obtenir une définition satisfaisante. La définition que nous utilisons de nos jours, donnée dans le plan, est due à Weierstrass, introduisant le concept de limite d'une fonction numérique vers 1860. On montre alors par exemple que les constantes, les polynômes, la fonction sinus ou encore la valeur absolue sont continues.

La notion de dérivée apparaît à la fin du XVII^e siècle, sous l'impulsion de Newton et de Leibniz. Jusqu'au début du XIX^e siècle au moins, il était évident pour tout le monde qu'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ était dérivable, et même somme de sa série de Taylor, sauf en des points isolés, comme la valeur absolue qui est continue mais non dérivable en 0. C'est malheureusement loin d'être le cas puisque Weierstrass (1875) a construit une fonction continue nulle part dérivable - un autre exemple est donné dans le plan - et Banach a montré que l'ensemble de ces fonctions était dense dans celui des fonctions continues. Voici donc un lien fort reliant continuité et dérivabilité. Ce théorème est prouvé en fin de document. La place de ce théorème dans le plan est discutable puisque la preuve nécessite des théorèmes cités par la suite, tels que le théorème de Weierstrass et l'inégalité des accroissements finis, ainsi que la norme uniforme que l'on définit dans la partie consacrée à la topologie et aux propriétés fondamentales, mais on a voulu exposer dès le début un lien fort reliant continuité et dérivabilité, autre que la propriété «continue implique dérivable».

Les structures multiples que l'on peut mettre sur $\mathbb{R}$ (ordre, topologie, structure de corps) interfèrent les unes avec les autres et donnent aux fonctions d'une variable réelle, à savoir les applications d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, un certain nombre de propriétés qui ne peuvent en général que partiellement se généraliser aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ comme par exemple le théorème des valeurs intermédiaires. Dans cette leçon, on introduit donc de nombreux théorèmes fondamentaux sur les fonctions réelles à valeurs réelles, tels que le théorème de Heine, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis auxquels on apporte différentes applications. Tous ces théorèmes sont cités dans la deuxième partie que l'on a choisi d'organiser en fonction de certaines propriétés topologiques sur lesquelles ils sont fondés, comme la compacité pour le théorème de Heine ou la connexité pour le théorème des valeurs intermédiaires. On reste cependant dans le cas de fonctions quelconques, puis on applique ces théorèmes aux fonctions convexes et aux fonctions monotones dans la troisième partie qui concerne l'étude de certaines classes de fonctions, dans laquelle on donnera également quelques théorèmes concernant les fonctions définies par une intégrale.

La compacité permet également de définir la norme uniforme pour des fonctions continues sur un compact, les compacts de $\mathbb{R}$ étant les fermés bornés. L'espace de fonctions continues sur un compact muni de la norme uniforme est étudié plus particulièrement en dernière partie où l'on caractérise les parties relativement compactes de cet espace par le théorème d'Ascoli. Ce théorème est également démontré en fin de document.

Il est également important de s'intéresser à la stabilité des notions de continuité et de dérivabilité. Pour cela, on utilise deux types de convergence : la convergence simple, qui correspond à une convergence point par point, et la convergence uniforme, qui est une convergence plus globale. Cette dernière est la plus intéressante finalement car elle permet de donner des informations sur la régularité de la limite d'une suite de fonctions. Cette dernière est liée à la norme uniforme mais nous avons fait le choix d'en parler avant, laissant les notions de topologies pour les parties suivantes. C'est pourquoi, la stabilité des notions est placée dans la première partie.

On a omis de parler des séries mais les théorèmes s'obtiennent directement de ceux faisant intervenir les suites de fonctions, en prenant simplement pour suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles.

Cadre. On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$.

2 Notions de continuité et dérivabilité

Cette partie introduit les concepts de continuité et de dérivabilité des fonctions réelles à valeurs réelles. Elle insiste sur les liens entre ces deux notions et étudie la stabilité de ces deux notions.

2.1 Continuité

Commençons par la notion de continuité d'une fonction.

Définition 1. Soit a un point de I. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *continue en a* si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in I :\ (|x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon)\,.$$

On dit que f est *continue sur I* si f est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Les exemples suivants en découlent alors facilement.

Exemple 2. Les fonctions constantes, la fonction $x \mapsto x^n$ et la fonction sin sont continues.

Proposition 3. *Une fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point.*

Proposition 4 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soit a un point de I. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Cette proposition peut être très utile dans certains cas pour démontrer la continuité d'une fonction, comme dans l'exemple et l'application qui suivent.

Exemple 5. La fonction indicatrice $1_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Application 6. Deux fonctions continues égales sur une partie dense de $\mathbb{R}$ sont égales sur tout $\mathbb{R}$.

Si une fonction n'est pas définie en un point, on peut néanmoins, dans certains cas, la prolonger en une fonction qui est continue.

Théorème 7 (Prolongement par continuité)**.** Soit a un point de $\overline{I} \setminus \mathring{I}$ et l un réel. Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a pour limite l en a alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ de f à $I \cup \{a\}$ qui est continu en a et défini par

$$\tilde{f}(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \\ l \text{ si } x = a \end{cases} \quad .$$

On dit que f se prolonge par continuité en a.

Exemple 8. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Une notion plus forte que celle de continuité est la suivante.

Définition 9. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall (x,y) \in I^2,\ (|x-y| \leq \eta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| \leq \epsilon).$$

Exemple 10. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Proposition 11. *Une fonction uniformément continue est continue.*

2.2 Dérivabilité, liens avec la continuité

Cadre. On suppose dans cette partie que I est un intervalle ouvert.

Passons maintenant à la notion de dérivabilité.

Définition 12. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *dérivable en* $a \in I$ si la fonction

$$x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$

admet une limite finie en a. Quand cette limite existe, elle est unique, on l'appelle *nombre dérivé de f en a* et on la note $f'(a)$.

En termes de développement limité, cela s'exprime de la manière suivante.

Remarque 13. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \mathrm{o}_{x\to a}(x-a).$$

Et dans ce cas, $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

Définition 14. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *dérivable sur I* si elle dérivable en tout point de I. On note $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue sur I.

Exemple 15. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cos.

Application 16 (Calculs de dérivées de fonctions réciproques)**.** Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nous avons vu qu'il existe des fonctions à la fois continues et dérivables. En fait, toute fonction dérivable est continue mais il existe des fonctions continues non dérivables.

Proposition 17. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ alors f est continue en a.*

Contre exemple 18. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Jusqu'à la moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle, on pensait généralement qu'une fonction continue était dérivable sauf peut-être en quelques points. Ce n'est pourtant pas le cas comme l'illustre le résultat suivant.

Contre exemple 19. La fonction de Van der Waerden, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x),$$

où ϕ est la fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-1,1]$ par $\phi(x) = |x|$, est continue mais nulle part dérivable.

Ce contre-exemple est en fait un cas particulier du théorème suivant dont la démonstration requiert entre autres les théorèmes de Weierstrass et des accroissements finis donnés plus loin. Ce théorème donne un lien fort entre la continuité et dérivabilité.

Théorème 20. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

2.3 Stabilité des notions

Proposition 21. *La continuité est stable par somme, produit, inverse et composition (en faisant attention aux domaines).*

De même, les sommes, produits, inverse (quand la fonction ne s'annule pas) de fonctions dérivables sont dérivables.

La dérivabilité est également préservée par la composition.

Proposition 22. *Soient I et J deux intervalles ouverts et soient $f : I \to J$ une fonction dérivable en $a \in I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $b = f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ définie sur I est dérivable en a et $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Proposition 23. *L'espace $(\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$ est une algèbre.*

Grâce au théorème 26 ci-après, l'espace $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ peut être muni d'une topologie dite de la convergence uniforme que l'on définit maintenant.

Définition 24. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \mapsto \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall x \in I \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : I \mapsto \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in I \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Remarque 25. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Théorème 26. La limite uniforme f d'une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue.

Corollaire 27. *L'espace $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme est fermé dans l'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur I.*

Le contre-exemple qui suit est une conséquence du corollaire précédent.

Contre exemple 28. La suite $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

qui n'est pas continue. Cependant, la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$ puisque la fonction limite n'est pas dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Théorème 29. On suppose que I est ouvert. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et dérivables sur I qui converge simplement sur I vers une fonction f. Si la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $g : I \mapsto \mathbb{R}$, alors la fonction f est dérivable sur I et $f' = g$.

Le résultat du théorème précédent n'est pas vérifié si la suite des dérivées ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ comme le montre le contre-exemple suivant pour lequel la suite des dérivées converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

En effet, on remarque que

$$f'(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0,$$

tandis que

$$f'_n(\frac{1}{n}) \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

On retrouve ainsi le résultat connu que la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Contre exemple 30. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$f_n \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array} .$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui converge uniformément vers

$$f \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

qui n'est pas dérivable en 0.

3 Propriétés fondamentales et topologie

Cette partie est organisée en fonction de propriétés topologiques. On y énonce de nombreux théorèmes essentiels en analyse.

3.1 Compacité et continuité

On commence par rappeler que la classe des compacts de $\mathbb{R}$ est préservée par continuité. Ce résultat, plus précisément énoncé dans la propostion 32, est une conséquence de la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$, objet de la proposition 31.

Proposition 31. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Proposition 32. *L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.*

Le théorème suivant caractérise les bornes de l'image d'un compact par une application numérique continue.

Théorème 33. Une fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Compte tenu de la proposition 32, $f(K)$ est compact. Donc $f(K)$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne inférieure et une borne supérieure. Montrons que ces bornes sont atteintes. Notons alors $m = \inf_{x\in K} f(x)$ et $M = \sup_{x\in K} f(x)$. Montrons que m et M sont des éléments de K.

Par définition de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que

$$m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n}.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact K, donc admet une sous-suite $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $a \in K$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$m \leq f(x_{\phi(n)}) < m + \frac{1}{\phi(n)}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi(n) = +\infty$, par continuité de f, on a

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)}) = m.$$

On montre de même que $M \in K$.

D'où le résultat. □

Cadre. On considère maintenant K un compact de $\mathbb{R}$.

Grâce à la proposition 35 ci-après, l'espace $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ peut être muni d'une métrique associée à la norme de la convergence uniforme que l'on définit maintenant.

Définition 34. On appelle *norme de la convergence uniforme* la norme définie pour tout $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)|.$$

Elle donne une caractérisation de la convergence uniforme vue en première partie.

Proposition 35. *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur K converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ si et seulement, $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.*

On obtient alors le résultat de complétude suivant.

Proposition 36. *L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.*

Nous avons vu à la proposition 11 qu'une fonction uniformément continue était continue. Sur un compact, la réciproque est également vraie.

Théorème 37 (Théorème de Heine)**.** Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Application 38 (Théorème de Weierstrass)**.** Toute fonction réelle continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.

3.2 Connexité et continuité

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont relativement simples. De façon analogue à la classe des compacts de $\mathbb{R}$, la classe des connexes de $\mathbb{R}$ est conservée par continuité. Ce résultat, énoncé plus précisément dans la proposition 41 est une conséquence directe de la caractérisation préalable des connexes de $\mathbb{R}$, objet de la proposition 40.

Proposition 39. *Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Le résultat suivant est vrai dans tout espace métrique.

Proposition 40. *L'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe.*

Dans la formulation générale théorique du théorème 41, le théorème des valeurs intermédiaires est une conséquence directe des propositions 39 et 40. Il est par ailleurs bien connu sous la forme de la proposition 42.

Théorème 41 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Proposition 42 (Un autre énoncé du théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. Supposons que $f(a) < 0 < f(b)$.

L'image $f([a, b])$ est un intervalle qui contient $f(a)$ et $f(b)$, on a donc $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$. Or $0 \in [f(a), f(b)]$. Donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$ et c est différent de a et b puisque $f(a)f(b) \neq 0$.

D'où le résultat. □

Exemple 43. Un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

La réciproque du théorème des valeurs intermédiaires est cependant fausse. Le théorème de Darboux permet de le montrer.

Théorème 44 (Théorème de Darboux)**.** Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle, *ie* f' vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple 45. La fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0 est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sa dérivée vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires alors qu'elle n'est pas continue en 0.

3.3 Extrema, dérivation et conséquences

Le théorème 33 affirme l'existence d'extrema atteints pour une fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}$. Si une fonction est en outre dérivable, le théorème 45 permet de déterminer si un point donné est un extremum. Un tel extremum est en outre localisable par le théorème 48 dit de Rolle.

Théorème 46. Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un extremum en $c \in \mathring{I}$ et est dérivable en c, alors $f'(c) = 0$.

Contre exemple 47 (Réciproque fausse)**.** La fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0 mais pas d'extremum en 0.

Du théorème précédent découle le théorème de Rolle.

Théorème 48 (Théorème de Rolle)**.** Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. L'application f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle atteint sa borne supérieure en un point x_M de $[a, b]$.
• Si $x_M \in]a, b[$ alors f admet *a fortiori* un extremum local en x_M, donc

$$f'(x_M) = 0.$$

• Sinon, toujours par continuité sur le segment $[a, b]$, f atteint sa borne inférieure en un point x_m de $[a, b]$.
-Si $x_m \in]a, b[$, alors

$$f'(x_m) = 0.$$

-Sinon, on est dans le cas où f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure en a et b et donc est constante. Donc, par exemple,

$$f'(\frac{a+b}{2}) = 0.$$

Dans tous les cas, f' s'annule en un point de $]a, b[$. □

Le contre-exemple ci-dessous montre que théorème de Rolle ne s'applique plus au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Contre exemple 49. L'application $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & e^{it} \end{array}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in]0, 2\pi[$.

Application 50 (Expression de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange.)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ et soient $x_1, .., x_n$ n points distincts de $[a, b]$. On note $L_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f en les x_i. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe un point $c_x \in [a, b]$ tel que :

$$f(x) - L_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f^{(n+1)}(c_x).$$

Du théorème de Rolle, on déduit les théorèmes suivants.

Théorème 51 (Théorème des accroissements finis.)**.** Si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

De façon plus générale, la dérivée d'une fonction continue, quand elle existe, permet de décrire les variations de cette fonction. Ceci est une autre conséquence du théorème de Rolle.

Conséquence. *Si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors :*
-f est croissante si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$.
-f est constante si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$.

Le théorème et l'application qui terminent ce paragraphe sont deux conséquences très utilisées du théorème de Rolle.

Théorème 52 (Inégalité des accroissements finis.)**.** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Application 53 (Prolongement d'une fonction dérivable.)**.** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $[a, b] \setminus \{c\}$, et si f' admet une limite l en c, alors f est dérivable en c et $f'(c) = l$.

3.4 Dérivées supérieures et formules de Taylor

Les dérivées d'ordre supérieur définies par récurrence, quand elles existent, sont à la base des formules de Taylor d'approximation d'une fonction à un ordre aussi élevé que possible. Les théorèmes 55 à 57 fournissent les conditions d'application à f en fonction de la régularité de f en précisant l'expression de l'erreur d'approximation. On peut déjà remarquer que les formules de Taylor-Lagrange données dans les théorèmes 55 et 56 sont globales, par opposition à la formule de Taylor-Young du théorème 57 qui est un résultat local.

Définition 54. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f' est de classe C^k. En fait, $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ k fois dérivable et de dérivée k-ème continue. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 55 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et est $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Théorème 56 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 57 (Formule de Taylor-Young)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable n fois en $a \in \mathring{I}$, alors elle admet au voisinage de a le développement limité d'ordre n suivant

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_{x\to a}(x-a)^n.$$

Application 58 (Inégalité de Kolmogorov)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ telle que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $k \in \{1,..,n\}$, les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ avec

$$||f^{(k)}||_\infty \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} ||f||_\infty^{1-\frac{k}{n+1}} ||f^{(n+1)}||_\infty^{\frac{k}{n+1}}.$$

4 Etude de certaines classes de fonctions

Ce paragraphe est consacré à des considérations de transversalité : comment la catégorie des fonctions continues, et plus spécifiquement la sous-catégorie des fonctions dérivables, recoupent d'autres catégories bien connues de fonctions réelles, à savoir les fonctions monotones, convexes, définies par une intégrale et continues sur un compact.

4.1 Fonctions monotones

Une fonction monotone n'est pas nécessairement continue. On peut caractériser ses points de discontinuité et ceux où elle est dérivable.

Proposition 59. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.*

Proposition 60. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

Théorème 61 (Admis.)**.** Une fonction monotone est dérivable presque partout.

4.2 Fonctions convexes

Une fonction convexe sur un intervalle est continue à l'intérieur de cet intervalle. Inversement, on peut étudier la question de la convexité d'une fonction dérivable grâce au théorème 66 et à son corollaire 67.

Définition 62. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Exemple 63. La fonction exp est convexe.

Proposition 64. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I alors f est continue sur $\mathring{I}$.*

Contre exemple 65. La fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = x^2$ est convexe sur $[0,+\infty[$ et n'est pas continue en 0.

Théorème 66 (Caractérisation d'une fonction convexe)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe
2. f' est croissante
3. la courbe de f est au dessus de ses tangente.

Corollaire 67. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonctions deux fois dérivable sur I. Alors, f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.*

Application 68 (Inégalité de Hölder)**.** Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour tout $a_1, .., a_n \geq 0$, $b_1, .., b_n \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

4.3 Fonctions définies par une intégrale

Le prototype de cette classe de fonctions est défini par le théorème 69 classiquement appelé théorème fondamental de l'analyse.

Théorème 69. Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ alors pour tout $a \in I$ et tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

On généralise la construction du théorème précédent en considérant des intégrales à paramètres pour lesquelles on établit des propriétés de continuité et de dérivabilité rappelées dans les théorèmes 70 et 72 respectivement.

Théorème 70. Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que

1. pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable,
2. pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur I,
3. pour tout compact $K \subset I$, il existe $g \in L^1$ positive, indépendante de t telle que pour tout $t \in K$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(t, x)| \leq g(x)$.

   Alors, la fonction $F : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t, x)\mathrm{d}x$ est continue sur I.

Exemple 71. La fonction $\gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)\mathrm{d}t$ est bien définie et est continue sur $]0, +\infty[$.

Théorème 72. Soit $f : I \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que

1. pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est intégrable,
2. pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I,
3. pour tout compact $K \subset I$, il existe $g \in L^1$ positive, indépendante de t telle que pour tout $t \in K$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)| \leq g(x)$.

   Alors, la fonction $F : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t, x)\mathrm{d}x$ est dérivable sur I et $F'(t) \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\mathrm{d}x$.

Exemple 73. La fonction γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

4.4 Espace des fonctions continues sur un compact

En plus de munir $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ d'une norme qui en fait un espace de Banach d'après la proposition 36, on peut étudier le problème de la description de sous-espaces topologiques classiques. Ainsi, on sait caractériser les parties relativement compactes de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ grâce au théorème d'Ascoli et identifier au moyen de l'application 75 une classe d'opérateurs à noyaux permettant de les construire à partir des parties bornées de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$.

Théorème 74 (Théorème d'Ascoli)**.** Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Soit $A \subset \mathcal{C}^\infty(K, \mathbb{R})$. Alors A est équicontinue et bornée si et seulement si A est relativement compacte, où on dit que A est équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in K$ si $|x - y| < \eta$ alors pour tout $f \in A$, $|f(a) - f(y)| < \epsilon$.

Application 75 (Opérateurs à noyau)**.** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit K une application continue de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par $T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)\mathrm{d}y$. Alors T est un opérateur compact.

Contre exemple 76 (La bosse glissante)**.** Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non nulle. La suite $(t \mapsto f(t - n))_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue et bornée dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais elle n'admet pas de sous-suite uniformément convergente.